0 Einleitendes

0.1 Skript zur Vorlesung

http://www.fbrandt.de → Vorlesung WS 06/07
oder
http://home.arcor.de/fbrandt/ergaenz.html

0.2 Vorlesungsankündigung

Symmetrien spielen bei Analyse und Verständnis physikalischer Systeme und der Konstruktion physikalischer Theorien oft eine wichtige Rolle. Erhaltungsgrößen wie Energie, Impuls und Drehimpuls lassen sich auf Symmetrieeigenschaften zurückführen. Grundlegende physikalische Theorien wie die des Elektromagnetismus, die Allgemeine Relativitätstheorie oder das Standardmodell der Elementarteilchenphysik basieren wesentlich auf Symmetrieprinzipien. Im Kurs werden physikalisch wichtige Symmetrien diskutiert, anhand verschiedener Modelle und Theorien illustriert und modellunabhängige Eigenschaften und Anwendungen von Symmetrien vorgestellt (z.B. die Noether-Theoreme). Bei der Stoffauswahl können Hörerwünsche berücksichtigt werden.

0.3 Definitionen von Symmetrien

Meyers großes Taschenlexikon:

> Symmetrie, 1) *allg.:* Spiegelbildlichkeit, wechselseitige Entsprechung von Teilen; Ebenmäßigkeit. [...] 4) *Physik:* Eigenschaft von Objekten, physikal. Zuständen oder Naturgesetzen, die vorliegt, wenn diese nach Anwendung bestimmter mathematischer Transformationen (S.-Transformationen) wieder ihre ursprüngl. Form besitzen. Man unterscheidet zw. räumlichen S. (Drehungen, Spiegelungen, Translationen, z.B. in Raum und Zeit u.a.) und inneren S., die für Elementarteilchen eine wesentl. Rolle spielen (↑Erhaltungssätze, ↑Supersymmetrie).

http://de.wikipedia.org:

Symmetrie, allgemein:

> Symmetrie leitet sich vom altgriechischen symmetria her und bedeutet „Ebenmaß“. Allgemeiner formuliert handelt es sich dabei um eine wechselseitige Entsprechung von Teilen eines Ganzen in Bezug auf Größe, Form, Farbe oder Anordnung.
>
> Ein Objekt wird als symmetrisch bezeichnet, wenn es gegenüber bestimmten Transformationen (Symmetrieoperationen) invariant, d.h. im Erscheinungsbild unverändert ist. [...]

Symmetrie, Physik:

> Symmetrie ist ein grundlegendes Konzept der modernen Physik: Mathematisch beschrieben wird eine Symmetrie durch eine Symmetrie-Transformation (z. B. kontinuierliche Koordinatentransformationen wie Verschiebung (Translation)

oder Rotation, aber auch diskrete Transformationen wie z. B. Spiegelung). Hierbei muss zwischen Symmetrien der grundlegenden Theorien und Symmetrien konkreter Systeme (z. B. Moleküle, Festkörper) unterschieden werden. Eine Symmetrie der grundliegenden Theorie liegt dann vor, wenn sich die physikalischen Gesetze, die das Verhalten eines Systems beschreiben, bei Anwendung der Symmetrietransformation nicht verändern (also etwa die Physik in einem gespiegelten Universum dieselbe wäre wie in unserem); man spricht auch von der Invarianz des Systems unter der entsprechenden Symmetrieoperation. Ein konkretes physikalisches System muss dabei diese grundlegenden Symmetrien nicht zwingend aufweisen. [...]

0.4 Mathematische Formulierung von Symmetrien in der Physik

Objekte von Symmetrien:

- Lagrangefunktionen, Hamiltonfunktionen u. -operatoren, Bewegungsgleichungen
- Lösungen von Bewegungsgleichungen, Zustände, Observable, dynamische Variable

Symmetrietransformationen:

- kontinuierliche Transformationen
  - endliche Transformationen
    - globale Transformationen
    - lokale Transformationen
  - infinitesimale Transformationen
    - globale Transformationen
    - lokale Transformationen
- diskrete Transformationen

0.5 Themenauswahl (vorläufig)

- Symmetrien in der klassischen Mechanik (Punktteilchen)
  - Wdh.: Lagrangefunktion, Variationsprinzip, Bewegungsgleichungen
  - Definition und Formulierung von Symmetrien, endliche und infinitesimale Symmetrietransformationen
  - wichtige Symmetrien und zugehörige Erhaltungsgrößen
  - 1. Noether-Theorem in der klassischen Mechanik
- Symmetrien in der klassischen Feldtheorie
- 1. Noether-Theorem, allgemeine Form
- Lorentzsymmetrie
- Lokale Symmetrien (Eichsymmetrien), einfache Beispiele
- 2. Noether-Theorem
- Yang-Mills-Theorie oder Allgem. Relativitätstheorie

Das Skript ergänzende Literatur zur Vorlesung:

- E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, Heft 2 (1918) 235-257, Internet: http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?ht=VIEW&did=D63716 (Original-Artikel), http://arXiv.org/abs/physics/0503066 (Englische Übersetzung)
- M.Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press 1992
- P.J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag 1986

1 Symmetrien in der klassischen Mechanik

1.1 Lagrangefunktion, Variationsprinzip, Bewegungsgleichungen

Wirkung:

$$S=\int dt\ L([q],t),\quad [q]\equiv\{q^i,\dot q^i\},\quad \dot q^i=\frac{dq^i}{dt}$$

Variationsprinzip:
Die Bewegung zwischen zwei Systemzuständen $q^i(t_1)$ und $q^i(t_2)$ verläuft so, dass $S=\int_{t_1}^{t_2}dt\,L$ extremal ist. Dies erfordert: Wenn $q^i(t)$ eine solche Bewegung beschreibt, dann muss $\delta S=0$ für alle infinitesimalen Abweichungen $q^i(t)+\delta q^i(t)$ davon gelten, die $\delta q^i(t_1)=\delta q^i(t_2)=0$ erfüllen, d.h.

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\ \delta L\overset{!}{=}0 \tag{1.1}$$

wobei

$$\begin{aligned}\delta L&=L([q+\delta q],t)-L([q],t)\\&=\delta q^i\ \frac{\partial L([q],t)}{\partial q^i}+\delta\dot q^i\ \frac{\partial L([q],t)}{\partial\dot q^i}\\&=\delta q^i\ \frac{\delta L([q],t)}{\delta q^i}+\frac{d}{dt}\Big(\delta q^i\ \frac{\partial L([q],t)}{\partial\dot q^i}\Big)\end{aligned} \tag{1.2}$$

mit

$$\frac{\delta L([q],t)}{\delta q^i}=\frac{\partial L([q],t)}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\ \frac{\partial L([q],t)}{\partial\dot q^i} \tag{1.3}$$

Dabei wurde benutzt:

$$\delta\dot q^i=\frac{d(\delta q^i)}{dt} \tag{1.4}$$

Einsetzen von (1.2) in (1.1) liefert:

$$\begin{aligned}\delta S&=\int_{t_1}^{t_2}dt\ \delta q^i\ \frac{\delta L([q],t)}{\delta q^i}+\Big[\delta q^i\ \frac{\partial L([q],t)}{\partial\dot q^i}\Big]_{t_1}^{t_2}\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\ \delta q^i\ \frac{\delta L([q],t)}{\delta q^i}\overset{!}{=}0\end{aligned} \tag{1.5}$$

wobei $\delta q^i(t_1)=\delta q^i(t_2)=0$ verwendet wurde. $\delta S=0$ für *beliebige* δq^i erfordert:

$$\frac{\delta L([q],t)}{\delta q^i}=0,\qquad \frac{\delta}{\delta q^i}=\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\ \frac{\partial}{\partial\dot q^i} \tag{1.6}$$

Ergänzende Bemerkungen:

- (1.6) sind die Bewegungsgleichungen (Euler-Lagrange-Gleichungen), $\frac{\delta}{\delta q^i}$ bezeichnet die Euler-Lagrange-Ableitung nach q^i.
- Die hier verwendete Notation $\frac{\delta}{\delta q^i}$ für die Euler-Lagrange-Ableitung nach q^i ist keine Standardnotation. Häufiger verwendet man $\frac{\delta}{\delta q^i}$ als Bezeichnung für die Funktionalableitung nach q^i.
- Apropos Euler-Lagrange-Ableitung: der Begriff ist ein wenig irre führend, denn diese Operation erfüllt nicht die Produktregel und verdient daher im strengen Sinne nicht die Bezeichnung „Ableitung“ ($\frac{\delta(L_1 L_2)}{\delta q^i} \neq \frac{\delta L_1}{\delta q^i} L_2 + L_1 \frac{\delta L_2}{\delta q^i}$).
- **Wichtig im Zusammenhang mit Symmetrien:** Die Bewegungsgleichungen ändern sich nicht, wenn zu L eine totale Zeitableitung addiert wird:

$$\frac{\delta}{\delta q^i}\Big(L([q],t) + \frac{df([q],t)}{dt}\Big) = \frac{\delta L([q],t)}{\delta q^i} \tag{1.7}$$

Dies kann man folgendermaßen zeigen:

- Indirekt über das Variationsprinzip:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} dt\ \delta\ \frac{df([q],t)}{dt} &= \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{d(\delta f([q],t))}{dt} \\ &= \Big[\delta f([q],t)\Big]_{t_1}^{t_2} = 0\end{aligned}$$

wobei im ersten Schritt $[\frac{d}{dt}, \delta]$ verwendet wurde (vgl. (1.4)), und im zweiten Schritt, dass δf linear in den δq^i und deren Ableitungen ist und $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$ (und analog für deren Ableitungen) gilt.

- Direkt über

$$\frac{\delta}{\delta q^i}\Big[\frac{df([q],t)}{dt}\Big] = 0$$

Leicht verifizierbar z.B. für $f([q],t) = f(q,t)$; allgemeiner Beweis folgt später.

- Allgemein gilt: eine Funktion $f([q],t)$ hat verschwindende Euler-Lagrange-Ableitungen nach allen q^i genau dann, wenn $f([q],t)$ eine totale Zeitableitung ist,

$$\frac{\delta f([q],t)}{\delta q^i} = 0 \quad \forall q^i \quad \Leftrightarrow \quad \exists g([q],t):\ f([q],t) = \frac{dg([q],t)}{dt}\ . \tag{1.8}$$

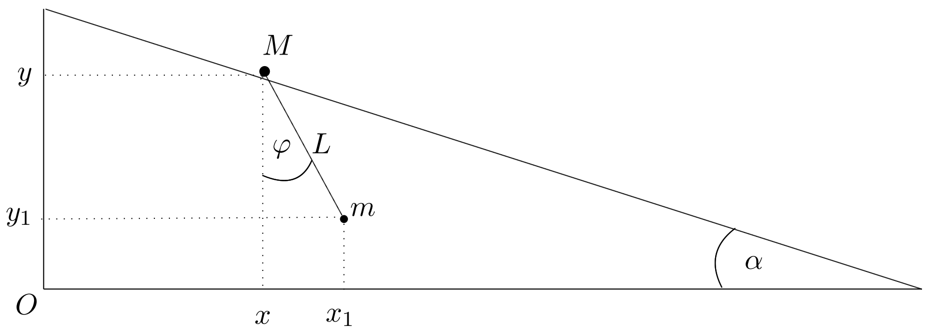
Dies gilt nicht nur für Funktionen $f([q],t)$, die von q^i, $\dot{q}^i$ und t abhängen können, sondern ganz allgemein für Funktionen, die von q^i, $\dot{q}^i$, $\ddot{q}^i$, …und t abhängen können, wobei $\frac{\delta}{\delta q^i}$ die allgemeine Form der Euler-Lagrange-Ableitung nach q^i ist:

$$\frac{\delta}{\delta q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}^i} \mp \ldots \tag{1.9}$$

Beweis folgt später.

1.2 Übung 1

Eine Masse M kann reibungsfrei eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel α im homogenen Schwerefeld mit Schwerkraftbeschleunigung g herunter gleiten. An M ist ein ebenes Pendel mit Masse m und masseloser starrer Stange der Länge L befestigt, das reibungsfrei schwingen kann. Ermitteln Sie die Lagrangefunktion $L([q],t)$ dieses Systems mit $\{q^1,q^2\} = \{x,\varphi\}$ $(x,\varphi$ wie in der Zeichnung).



Lösung:

$$L = \frac{M}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2) - Mgy - mgy_1$$

mit

$$\begin{aligned} y/x &= \tan\alpha \\ x_1 &= x + L\sin\varphi \\ y_1 &= y - L\cos\varphi \end{aligned}$$

Das ergibt:

$$\begin{aligned} L([x,\varphi]) =& \frac{M+m}{2}\,\dot{x}^2\,(1+\tan^2\alpha) + \frac{m}{2}\,L^2\,\dot{\varphi}^2 \\ &+ m\,L\,\dot{\varphi}\,\dot{x}\,(\cos\varphi + \tan\alpha\sin\varphi) \\ &- (M+m)\,g\,x\tan\alpha + m\,g\,L\,\cos\varphi \end{aligned} \tag{1.10}$$