Die Noether Theoreme

Friedemann Brandt

Antrittsvorlesung, 12. April 2000

Zur Wahl des Themas

Kurzbiographie Noether

Allgemeine Form der Theoreme

Noethers Originalarbeit

Eigene Arbeiten

Zur Wahl des Themas

- Relevanz von Symmetrien u. Erhaltungsgesetzen

- Ein alter Hut !?
  Noethers Arbeit ist von 1918;
  “Noethers Theorem” ist Standardstoff von Lehrbüchern und Vorlesungen

  Dennoch:
  Darstellung meist unvollständig
  (bisweilen haarsträubend)

  Ausnahme:
  Peter J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag 1986

- Zusammenhang mit eigenen Arbeiten

Emmy (Amalie) Noether

*23.3.1882	Erlangen
1889-97	Höhere Töchter Schule
1900	Staatsexamen Lehramt (Engl., Franz.)
1900-04	Gasthörerin in Math. Unis Erlangen u. Göttingen (u.a. bei Hilbert, Klein, Minkowski, Schwarzschild)
1904-07	Doktorarbeit in Erlangen erste Veröffentlichungen
1908-15	Uni Erlangen, Forschung u. Lehre (ohne Stelle oder Gehalt)
1915-33	Uni Göttingen (auf Einladung Hilberts) Forschung u. Lehre
1919	Habilitation; Habilschrift enthält "Invariante Variationsprobleme" (Arbeit mit den "Noether Theoremen")
1923-33	"Nicht-beamtete ausserord. Prof." geringes Stipendium für Lehrauftrag
1933	Amstenthebung durch Nazis
1933-35	Visiting Prof. in Bryn Mawr, USA Vorlesungen am IAS, Princeton
†14.4.1935	Embolie nach Tumoroperation

Allgem. (u. moderne) Form der Theoreme

Voraussetzung:

Bewegungsgleichungen folgen mittels Variationsprinzip aus einer Wirkung (bzw. Lagrangefunktion)

Theorem 1 (einfache Version)

Zu jeder kontinuierlichen globalen Symmetrie der Wirkung korrespondiert ein erhaltener Strom (= eine Kontinuitätsgleichung) und umgekehrt.

Theorem 2 (einfache Version)

Zu jeder lokalen Symmetrie (= Eichsymmetrie) der Wirkung korrespondiert eine (Noether-) Identität zwischen den Bewegungsgleichungen und umgekehrt.

Erweiterte Versionen:

Theorem 1 gilt analog für Äquivalenzklassen globaler Symmetrien und erhaltener Ströme, Theorem 2 für Äquivalenzklassen lokaler Symmetrien und Noether-Identitäten.

Symmetrien und erhaltene Ströme

Wirkung: $$I = \int d^n x \, \mathcal{L}(x, U)$$

$$\mathcal{L}(x, U) \equiv \mathcal{L}(x^\mu, U^a, \partial_\mu U^a, \partial_\mu \partial_\nu U^a, \ldots)$$

$$U^a = U^a(x)$$

1. (Kontinuierliche) Globale Symmetrien

Infinitesimale Transformationen:

$$\delta_\epsilon \, x^\mu = 0 \ , \ \ \delta_\epsilon \, U^a = \epsilon \, G^a(x, U) \ , \ \ \epsilon = konstant$$

Invarianzbedingung (Definition!)*:

$$\delta_\epsilon \, \mathcal{L} = \epsilon \, \partial_\mu K^\mu(x, U)$$

Beispiel ($n = 1$, $\{x^\mu\} = \{t\}$, $\{U^a\} = \{U\}$):

$$I = \int dt \, \mathcal{L}(U) \ , \ \ \mathcal{L}(U) = \tfrac{1}{2} \dot{U} \dot{U} - V(U)$$

$$\delta_\epsilon U = \epsilon \, \dot{U} \quad \Rightarrow \quad \delta_\epsilon \, \mathcal{L} = \epsilon \, \partial_t \mathcal{L}$$

---

* $\delta_\epsilon \mathcal{L} = \mathcal{L}(x, U + \delta_\epsilon U) - \mathcal{L}(x, U) + O(\epsilon^2)$

2. Lokale Symmetrien = Eichsymmetrien

Infinitesimale Transformationen:

$$\delta_\lambda x^\mu = 0$$
$$\delta_\lambda U^a = R^a(x, U, \lambda) = r^a(x, U)\lambda + r^{a\mu}(x, U)\partial_\mu\lambda + \ldots$$
$$\lambda = \textit{beliebige Funktion der } x^\mu$$

Invarianzbedingung:

$$\delta_\lambda \mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu(x, U, \lambda)$$

Beispiel ($n = 1$, $\{x^\mu\} = \{t\}$, $a = 1 \ldots 4$):

$$I = \int dt\, \mathcal{L}(U)$$

$$\mathcal{L}(U) = \sqrt{g_{ab}\dot{U}^a\dot{U}^b}$$
$$= \sqrt{\dot{U}^1\dot{U}^1 - \dot{U}^2\dot{U}^2 - \dot{U}^3\dot{U}^3 - \dot{U}^4\dot{U}^4}$$

$$\delta_\lambda U^a = \lambda\,\dot{U}^a \quad \Rightarrow \quad \delta_\lambda\mathcal{L} = \partial_t(\lambda\mathcal{L})$$

3. Erhaltene Ströme

Erhaltene Ströme $j^\mu(x,U)$ sind für jede Lösung der Bewegungsgleichungen divergenzfrei.

Was bedeutet das konkret?

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta U^a} = 0, \qquad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta U^a} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U^a} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu U^a)} + \ldots$$

Stromerhaltung (= Kontinuitätsgl.):

$$\partial_\mu j^\mu(x,U) = G^a(x,U)\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta U^a}$$

Anmerkung:
OBdA sind alle $G^a(x,U)$ Funktionen (statt Operatoren), denn

$$\partial_\mu \tilde{\jmath}^\mu(x,U) = [\tilde{g}^a(x,U) + \tilde{g}^{a\mu}(x,U)\partial_\mu + \ldots]\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta U^a}$$

führt auf dieselbe Bedingung für äquiv. Strom:

$$\partial_\mu \underbrace{\left[\tilde{\jmath}^\mu - \tilde{g}^{a\mu}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta U^a} + \ldots\right]}_{j^\mu \approx \tilde{\jmath}^\mu} = \underbrace{[\tilde{g}^a - \partial_\mu\tilde{g}^{a\mu} + \ldots]}_{G^a}\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta U^a}$$

Beispiele für die Theoreme

Beispiel für Theorem 1

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\dot{U}\dot{U} - V(U), \qquad \delta_\epsilon U = \epsilon\,\dot{U}$$

Die Stromerhaltungsgleichung

$$G^a(x,U)\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta U^a} = \partial_\mu\, j^\mu(x,U)$$

liefert in diesem Fall die Energieerhaltung:

$$\dot{U}\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta U} = -\dot{U}[\ddot{U} + V'(U)] = -\partial_t\,\underbrace{[\tfrac{1}{2}\dot{U}\dot{U} + V(U)]}_{\text{Energie}}$$

Beispiel für Theorem 2

$$\mathcal{L}(U) = \sqrt{\dot{U}^1\dot{U}^1 - \dot{U}^2\dot{U}^2 - \dot{U}^3\dot{U}^3 - \dot{U}^4\dot{U}^4}$$

$$\delta_\lambda U^a = \lambda\,\dot{U}^a$$

Noether-Identität:

$$\dot{U}^a\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta U^a} = 0$$

Beweis von Theorem 1 (einfache Version)

$\Rightarrow$:

Sei $\delta_\epsilon \mathcal{L} = \epsilon\, \partial_\mu K^\mu$ mit $\delta_\epsilon U^a = \epsilon\, G^a(x,U)$, $\delta_\epsilon x^\mu = 0$.
Explizit:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \mathcal{L} &= \epsilon\, G^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U^a} + \epsilon\, (\partial_\mu G^a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu U^a)} + \ldots \\ &= \epsilon\, G^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta U^a} + \epsilon\, \partial_\mu \left[G^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu U^a)} + \ldots \right] \\ &= \epsilon\, \partial_\mu K^\mu \\ \Rightarrow\ G^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta U^a} &= \partial_\mu \underbrace{\left[K^\mu - G^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu U^a)} + \ldots \right]}_{j^\mu} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$:

Sei $\partial_\mu j^\mu = G^a \delta\mathcal{L}/\delta U^a$.
Definiere $\delta_\epsilon U^a = \epsilon\, G^a$, $\delta_\epsilon x^\mu = 0$. Damit:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \mathcal{L} &= \epsilon\, \underbrace{G^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta U^a}}_{\partial_\mu j^\mu} + \epsilon\, \partial_\mu \left[G^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu U^a)} + \ldots \right] \\ &= \epsilon\, \partial_\mu \underbrace{\left[j^\mu + G^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu U^a)} + \ldots \right]}_{K^\mu} \end{aligned}$$

qed

Beweis von Theorem 2 (einfache Version)

$\Rightarrow$:

Sei

$$\delta_\lambda \mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu(x, U, \lambda) \tag{1}$$

mit

$$\delta_\lambda x^\mu = 0$$
$$\delta_\lambda U^a = R^a(x, U, \lambda) = r^a(x, U)\lambda + r^{a\mu}(x, U)\partial_\mu \lambda$$

[Der Einfachheit halber angenommen, dass R^a keine 2. Ableitung von λ enthält.]

Euler-Lagrange Ableitung von (1) nach λ liefert eine (Noether-) Identität:

$$r^a(x, U)\,\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta U^a} - \partial_\mu \left[r^{a\mu}(x, U)\,\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta U^a} \right] = 0 \tag{2}$$

$\Leftarrow$:

Sei (2) gegeben. Multipliziere (2) mit λ. Das Ergebnis läßt sich in die Form $\delta_\lambda \mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu(x, U, \lambda)$ bringen mit δ_λ wie oben.

Anmerkung

$\delta x^\mu = 0$ ist keine Beschränkung der Allgemeinheit.

Sei nämlich

$$\tilde{\delta} I = \int d^n x \, \partial_\mu \tilde{K}^\mu \qquad (3)$$

(mit gleichen Integrationsgebieten rechts und links), wobei

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x, U), \;\; \tilde{U}^a(\tilde{x}) = (U^a + \tilde{\delta} U^a)(x)$$

(3) ist equivalent zu

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu$$

wobei

$$\begin{aligned} &\delta x^\mu = 0 \\ &\delta U^a(x) = \tilde{\delta} U^a(x) + \xi^\mu \partial_\mu U^a(x) \quad \text{(Lieableitung)} \\ &K^\mu = \tilde{K}^\mu + \xi^\mu \mathcal{L} \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$\tilde{\delta} I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \mathcal{L} = \partial_\mu (\xi^\mu \mathcal{L})$$

Herleitung (bereits bei Noether zu finden):

Betrachte $\{x^\mu\} = \{t\}$, $\{U^a\} = \{U\}$ und

$$\tilde{t} = t - \xi(t, U) \;,\; \tilde{U}(\tilde{t}) = (U + \tilde{\delta} U)(t)$$
$$\Rightarrow \quad \tilde{U}(t) = U(t) + \tilde{\delta} U(t) + \xi(t, U)\dot{U}(t)$$

Damit:

$$\tilde{\delta} I = \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} d\tilde{t}\, \mathcal{L}(\tilde{t}, \tilde{U}(\tilde{t})) - \int_{t_0}^{t_1} dt\, \mathcal{L}(t, U(t))$$

Substituiere im ersten Integral $t = \tilde{t} + \xi \Rightarrow$

$$\tilde{\delta} I = -\int_{t_0}^{t_1} dt\, \partial_t \left[\xi(t, U(t))\mathcal{L}(t, U(t))\right] + \delta I$$

wobei

$$\delta t = 0 \;,\; \delta U(t) = \tilde{\delta} U(t) + \xi(t, U)\dot{U}(t)$$

Dies liefert, wie behauptet,

$$\tilde{\delta} I = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \partial_t \tilde{K} \quad \forall t_0, t_1 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \mathcal{L} = \partial_t(\tilde{K} + \xi \mathcal{L}).$$

Erweiterte Versionen der Theoreme

1. Triviale Eichsymmetrien

Jede Wirkung hat unendlich viele triviale Eichsymmetrien!

Diese verschwinden "on-shell",

$$\delta_\lambda U^a \approx 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta_\lambda U^a = N^a(x, U, \lambda, \partial)\,\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta U^a}$$

und sind von der Form

$$\delta_\lambda U^a = (-)^m \partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_m} (\lambda^{a\mu_1 \ldots \mu_m b \nu_1 \ldots \nu_n} \partial_{\nu_1} \ldots \partial_{\nu_n} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta U^b})$$

mit

$$\lambda^{a\mu_1 \ldots \mu_m b \nu_1 \ldots \nu_n} = -\lambda^{b \nu_1 \ldots \nu_n a \mu_1 \ldots \mu_m}$$

Triviale Noether-Identitäten:

$$\tilde{R}^a(x, U, \partial)\,\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta U^a} = 0, \;\; \tilde{R}^a(x, U, \partial) \approx 0$$

Beispiel:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\dot{U}\dot{U}, \qquad \delta_\lambda U = 2\lambda \dddot{U} + \dot{\lambda}\ddot{U}$$

$$\delta_\lambda \mathcal{L} = \partial_t(\dot{\lambda}\dot{U}\ddot{U} + 2\lambda\dot{U}\dddot{U} - \lambda\ddot{U}\ddot{U})$$

$$\tilde{R}(U) = \dddot{U} - \ddot{U}\partial_t$$

2. Triviale globale Symmetrien und Ströme

Jede Wirkung hat unendlich viele triviale globale Symmetrien!

Diese sind Eichtransformationen (triviale oder nicht-triviale !) mit $\lambda = \lambda(x, U)$,

$$\delta_\epsilon U^a = \delta_{\lambda(x,U)} U^a$$

Triviale erhaltene Ströme:

$$j^\mu \approx \partial_\nu K^{\nu\mu}, \quad K^{\nu\mu} = -K^{\mu\nu}$$

Beispiel:

$$\mathcal{L}(U) = \sqrt{\dot{U}^1\dot{U}^1 - \dot{U}^2\dot{U}^2 - \dot{U}^3\dot{U}^3 - \dot{U}^4\dot{U}^4}$$

$$\delta_\lambda U^a = \lambda \dot{U}^a$$

$$\delta_{\lambda=\epsilon} U^a = \epsilon \dot{U}^a$$

$$j = \mathcal{L} - \dot{U}^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{U}^a} = 0$$

3. Erweiterte Version der Noether-Theoreme

Zu jeder nicht-trivialen globalen Symmetrie korrespondiert ein nicht-trivialer erhaltener Strom und umgekehrt.

Zu jeder nicht-trivialen Eichsymmetrie korrespondiert eine nicht-triviale Noether-Identität und umgekehrt.

Noch präziser:
Definiere Äquivalenzklassen globaler und lokaler Symmetrien, erhaltener Ströme und Noether-Identitäten durch Gleichheit modulo jeweils trivialer Symmetrien, Ströme, Noether-Identitäten.

Die Äquivalenzklassen der globalen Symmetrien und erhaltenen Ströme korrespondieren Eins-zu-Eins.

Die Äquivalenzklassen der Eichsymmetrien und Noether-Identitäten korrespondieren Eins-zu-Eins.

“Noether-Ströme von Eichsymmetrien” sind trivial !